d'après le tableau des variations de h, $\forall x \in [2,+\infty[$, $h(x) > 0$

d'où $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} + \ln\frac{n}{n+1} > 0$ et par suite $f_n(n \ \ln(\frac{n}{n+1})) > 0$.

2°/a) On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) - (1+\frac{x}{n+1}) = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{\frac{x}{n}} = 0$ donc la droite

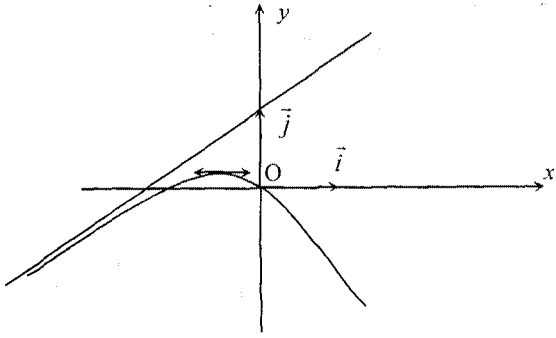
$D_n : y = \frac{1}{n+1}x + 1$ est une asymptote oblique à C_{f_n} au voisinage de $-\infty$.

b) On a $D_2 : y = \frac{1}{3}x + 1$ est une asymptote oblique à C_2 au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} = -\infty$$

donc la droite (yy') est une direction asymptotique à C_2 au voisinage de $+\infty$

Le maximum de f_2 est $f_2(2\ln(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{2}{3}$



3°/a) f_n est continue et strictement croissante sur

$]\ -\infty\ ,\ n\ \ln\frac{n}{n+1}\ ]$ donc f_n réalise une bijection de

$]\ -\infty\ ,\ n\ \ln\frac{n}{n+1}\ ]$ sur $]\ -\infty\ , f_n(\ n\ln\frac{n}{n+1}\ )]$

Or $f_n(n\ln\frac{1}{n+1}) > 0$

donc 0 admet un seul antécédent $x_n \in]\ -\infty\ ,\ n\ln\frac{n}{n+1}\ ]$ par f_n .